网络结构鲁棒性指标及应用研究

杜巍[1,2]， 蔡萌[1,2]， 杜海峰[2]
(1. 西安交通大学管理学院，710049，西安；2. 西安交通大学公共管理与复杂性科学研究中心，710049，西安)

摘要：为了更好地测度网络抵御破坏的能力，基于网络连通和恢复能力提出了连接鲁棒性和恢复鲁棒性两种指标. 运用这两种指标，以网络规模为500，取20次独立实验的均值，对ER随机网络、规则网络、BA无标度网络以及WS小世界网络4种典型网络结构进行仿真. 实验结果表明：ER随机网络对于恶意攻击的鲁棒性要优于其他3种网络；BA无标度网络仅节点恢复鲁棒性较好，边恢复鲁棒性和连接鲁棒性最差；规则网络拥有很好的连接鲁棒性但恢复鲁棒性最差；WS小世界网络受其参数影响，鲁棒性介于ER随机网络和规则网络之间. 同时还发现，网络结构鲁棒性的下降随着去除节点个数的增加和网络结构参数的改变而呈现出一定的“涌现”现象.

关键词：鲁棒性；复杂网络；小世界网络；无标度网络
中图分类号：TN711.1 **文献标志码**：A **文章编号**：0253-987X(2010)04-0093-05

Study on Indices of Network Structure Robustness and Their Application

DU Wei[1,2], CAI Meng[1,2], DU Haifeng[2]
(1. School of Management, Xi′an Jiaotong University, Xi′an 710049, China; 2. Center for Administration and Complexity Science, Xi′an Jiaotong University, Xi′an 710049, China)

Abstract: Connectivity robustness and recovery robustness are proposed to measure the degree of tolerance against failure and attacks in networks. Simulations are carried out in four types of classic networks (i. e., ER random network, regular network, BA scale-free network, and WS small-world network) with 500 nodes. Results obtained from an average of 20 tests on ER random network, regular network, BA scale-free network, and WS small-world network show that, ER random networks and regular networks are more robust than BA scale-free networks when involving in hostile attacks, and that WS small-world network are more robust than BA scale-free networks but less robust than random networks and regular networks. It is also found that an emergent decline of structural robustness appears with removing more nodes and changing network structure parameters.

Keywords: robustness; complex networks; small-world network; scale-free network

不论是互联网络等技术网络，还是人际互动形成的社会网络，在运行中经常会受到干扰或破坏，从而导致其性能降低甚至功能完全丧失. 网络结构对外界破坏的抵抗能力，即结构鲁棒性，已经成为复杂网络研究的重要特征之一[1-2]. 关于网络节点随机故障或遭受恶意攻击的结构鲁棒性研究已经受到广泛关注[3-6]. Kwon等人[3]通过研究反馈结构和网络鲁棒性之间的关系，指出无标度网络模型能比随机图模型演化出更多的反馈结构，同时系统的鲁棒性也得到了更大的提高. Ash等人[4]采用进化算法来优

收稿日期：2009-11-09. 作者简介：杜巍(1979—)，男，博士生；杜海峰(联系人)，男，教授，博士生导师. 基金项目：国家自然科学基金资助项目(70671083)；教育部新世纪优秀人才支持计划资助项目(NCET-07-0668)；长江学者奖励计划资助项目；教育部长江学者和创新团队发展计划资助项目(IRT0855)；微软亚洲研究院、美国Santa Fe Institute国际项目基金、斯坦福大学联合资助项目.

化网络结构,发现聚类、模块性和长路径长度都对网络鲁棒性有重要影响. Gao 等人[5]采用居间中心性研究网络鲁棒性,揭示对于大多数食物网来说,基于居间中心性的攻击比基于度的攻击更为有效[5]. Wang 等人[6]认为,通过优化网络效率(平均倒置路径长度)可以提高网络对随机故障的鲁棒性. 虽然目前对网络结构鲁棒性的影响因素从理论分析和攻击策略等方面进行了有益探讨,但还缺乏对网络结构鲁棒性指标及其在不同网络中应用的研究. 就度量指标而言,一般都是通过探测网络连通性作为鲁棒性的判断依据,而较少考虑网络受到破坏后的恢复能力,而且有关指标分析主要集中在无标度网络.

本文从网络抵御连接破坏的能力以及受到破坏后结构恢复能力两个方面,分别提出连接鲁棒性和恢复鲁棒性两种网络结构鲁棒性测度指标,并采用新的结构鲁棒性指标,从网络结构的角度对 ER 随机网络、规则网络、BA 无标度网络以及 WS 小世界网络等几种典型网络的鲁棒性进行实验分析,验证了本文鲁棒性指标的可用性和有效性,探讨了网络结构鲁棒性和网络结构特征之间的关系.

1 结构鲁棒性指标定义

鲁棒性用来表示系统在被干扰情况下保持其功能或性质的能力. 在遭受外界干扰或破坏时,网络结构鲁棒性不但要反映网络结构本身对于破坏的抵御能力,而且还要体现遭受破坏后结构的恢复能力. 本文将前者定义为连接鲁棒性,将后者定义为恢复鲁棒性.

1.1 连接鲁棒性

网络中某些节点在遭受攻击破坏后,剩余的节点之间仍然能够继续保持连通的能力,称为连接鲁棒性. 现实中对网络进行攻击的方式很多,比较典型的是随机攻击和恶意攻击. 与随机攻击相比,恶意攻击破坏度较大的节点,对网络造成的危害更大,因此本文采用恶意攻击的破坏方式进行实验. 从特定网络中去除度最大的 N_r 个节点及其相应的边,在破坏过程中,采用的是一次性破坏方式,即同时破坏 N_r 个符合条件的节点而不是依次破坏.

基于上述破坏方式,本文采用的连接鲁棒性的指标为[7]

$$R=\frac{C}{(N-N_r)} \tag{1}$$

式中:N 表示初始网络的规模;N_r 表示从网络中去除的节点个数;C 表示当节点被去除后网络中最大连通子图(即成分)中的节点个数.

1.2 恢复鲁棒性

社会互动中,如果很难获得特定个人的信息,一种可行的方法是通过询问与该个体有关系的人群,在一定程度上恢复该个体的信息. 类似策略已经用于通过网络方法寻找恐怖集团中的关键人物[8]. 基于上述社会现实,本文将恢复鲁棒性定义为:当一个网络中部分节点被破坏后,能够通过某些简单的策略将消失的网络结构元素(包括边和节点)进行恢复的能力. 针对节点和边两种情况,恢复鲁棒性指标分别定义为

$$D=1-\left[\frac{(N_r-N_d)}{N}\right] \tag{2}$$

$$E=1-\left[\frac{(M_r-M_e)}{M}\right] \tag{3}$$

式中:D 表示节点恢复鲁棒性指标;E 表示边恢复鲁棒性指标;N_d 表示通过某种策略恢复的节点个数;M 表示初始网络中边的数量;M_r 为从网络中去除的边的个数;M_e 表示通过某种策略恢复的边的数量.

一般地,网络的节点恢复鲁棒性要高于边恢复鲁棒性. 因为要完全破坏一个节点使之不能恢复,必须要将网络中与之相关的信息全部去除,即要同时破坏所有与之相连的边,而使网络中的一条边无法恢复,则只需要将这条边连接的两个节点去除就可以了,因为该边在网络中的相关信息仅保留在其两端的节点上.

由于难以利用解析关系描述上述指标和网络拓扑结构之间的关系,因此从理论上探讨上述指标的性质比较困难,本文主要基于典型网络的仿真实验加以分析和验证.

2 4种典型网络结构

采用本文的结构鲁棒性指标对 ER 随机网络、最近邻耦合规则网络、BA 无标度网络和 WS 小世界网络等 4 类典型网络进行结构鲁棒性分析.

2.1 随机网络

ER 随机网络模型[4](Random Network)是网络研究的主要参考模型之一. 对一个具有 N 个节点的网络,按照一定的概率 p 连接其中任意一对节点,即可构成 ER 随机网络,其网络密度 $\rho=[pN(N-1)]/[N(N-1)]=p$.

2.2 规则网络

如果将网络视为节点与连线的集合,那么节点

按确定的规则连线,所得到的网络可称为规则网络(Regular Network).本文中所使用的规则网络模型为最近邻耦合规则网络[9],即对于一个给定的 k 值(k 为偶数),将网络中的 N 个节点围成一个环,其中每个节点只与两边的 $k/2$ 个邻居节点相连.

2.3　无标度网络

网络的节点度服从幂律分布则可称为无标度网络(Scale-free Network).本文采用 Barabasi 和 Albert[10]提出的经典的 BA 无标度网络模型,其构造算法如下.

(1)增长:网络的初始节点数为 m_0,每经过一个时间 t_0 引入一个新的节点,将该节点连接到 m 个已存在的节点上,其中 $m \leqslant m_0$.

(2)择优连接:一个新的节点与网络中已存在的节点 i 相连的概率为

$$\Pi_i = \frac{k_i}{\sum_j k_j} \tag{4}$$

式中:k_i 表示节点 k 的度.

2.4　小世界网络

作为从完全规则网络向完全随机网络的过渡,Watts 和 Strogatz[11] 提出了小世界网络模型(Small-world Network).本文采用经典的 WS 小世界网络模型,其构造算法如下.

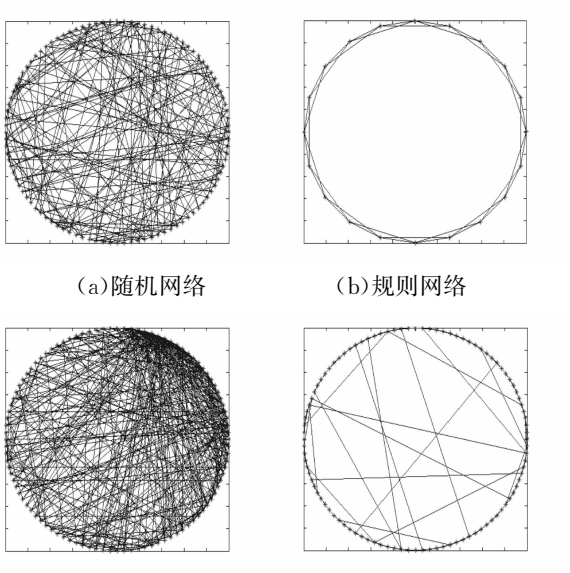
(1)构造规则网络:将一个包含 N 个节点的最近邻耦合网络围成一个环,其中每个节点与它左右相邻的 $k/2$ 个节点相连,k 为偶数.

(2)随机重连:以概率 p 随机地重新连接网络中的每条边,即将边的一个端点保持不变,而将另一个端点随机放在一个新的位置上,但要排除自身与自身的连线以及重复的连线.

4 种典型网络结构如图 1 所示.

3　仿真实验与讨论

仿真实验均在 Intel^{R} Core^{TM} 22.00 GHz 的 PC 上采用 Matlab7.0 编程实现,所采用的 4 种网络规模均从 50 递增至 650,其中 50 至 100 步长为 10,100 至 300 步长为 20,300 至 650 步长为 50,这些网络均为无自环无向 0-1 网络.其中:ER 随机网密度从 0.001 以步长 0.001 递增至 1;BA 无标度网络初始节点数 m_0 为 20,增长率 m 从 2 以步长 2 递增至 20;WS 小世界网络平均度 k 从 2 以步长 2 递增至 30,重连概率 p 从 0.000 2 以步长 0.000 2 递增至 0.1;规则网络平均度 k 从 2 以步长 2 递增至 30.



(a)随机网络　(b)规则网络　(c)无标度网络　(d)小世界网络

图 1　4 种典型网络结构图

需要说明的是,实验结果均为 20 次独立随机实验的统计平均值.由于实验发现网络规模对于网络结构鲁棒性指标变化趋势影响不大,因此本文仅以网络规模为 500 进行分析.

3.1　连接鲁棒性实验分析

图 2 中给出了网络规模为 500 时,几种具有代表性网络参数的连接鲁棒性指标随网络节点破坏数目增加而变化的情况.

对于 ER 随机网络,网络的连接能力在去除节点数目的一定范围内下降很快,表现出“涌现”现象,网络密度的增大可以提高连接鲁棒性.实验发现规模为 500 的 ER 随机网络,当密度不小于 0.3 时,网络的连通性不会遭到破坏,定义该密度为 ER 随机网连接鲁棒性的临界密度.图 3 显示了不同网络规模的 ER 随机网络临界密度,可以看出,随着网络规模的增大,临界密度呈下降趋势.

对于 BA 无标度网络,随着从网络中去除节点数目的增多,网络的连接能力的下降同样具有“涌现”现象,而随着网络密度的增大,网络的连接鲁棒性也随之增强.

对于 WS 小世界网络,在网络节点度和重连概率固定时,其连接鲁棒性 R 与网络节点度和重连概率 p 的关系如表 1 所示.

对于规则网络,在一次性破坏中,选取连续节点进行去除,规则网络的连接能力不会遭到破坏.

由图 2 还可以发现,规则网络和 ER 随机网络对于恶意攻击的连接鲁棒性最好,而 BA 无标度网络面对恶意攻击则表现得较为脆弱,WS 小世界网

络作为规则网络向随机网络的过渡，其鲁棒性介于两者之间. 对于固定规模的 4 种典型网络，其连接鲁棒能力的改变不仅随着去除节点个数的变化而呈现出“涌现”现象，而且随着其参数（主要是密度）的改变也呈现出“涌现”现象.

表 1 小世界网络连接鲁棒性指标与结构参数的关系

网络节点度	连接鲁棒性	
	$p\in[0.0002,0.01)$	$p\in[0.01,0.1]$
$k\in[2,8]$	$R\propto\frac{1}{p}$，$R\propto\frac{1}{k}$	$R\propto\frac{1}{p}$，$R\propto k$
$k\in[8,30]$	$R\propto\frac{1}{p}$，$R\propto\frac{1}{k}$	$R\propto p$，$R\propto k$

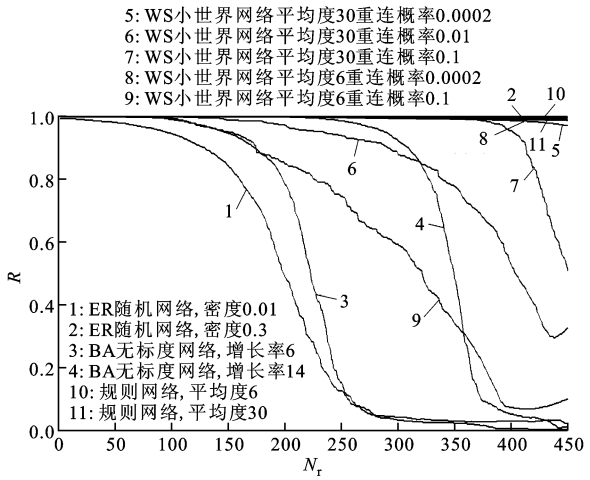


图 2 不同参数下 4 种典型网络的连接鲁棒性

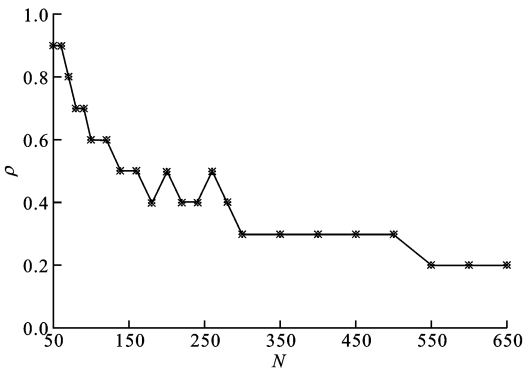


图 3 不同网络规模时 ER 随机网络的临界密度

3.2 节点恢复鲁棒性实验分析

依然采用 1.1 节中恶意攻击破坏策略，节点恢复策略是：如果节点 i 和节点 j 直接相连，那么当节点 i 被去除时，如果 j 还在剩余网络中，那么可以通过 j 的信息将节点 i 及它们之间的边进行恢复. 图 4 所示的是网络规模为 500，具有代表性网络参数的节点恢复鲁棒性指标随网络节点破坏数目增加而变化的情况.

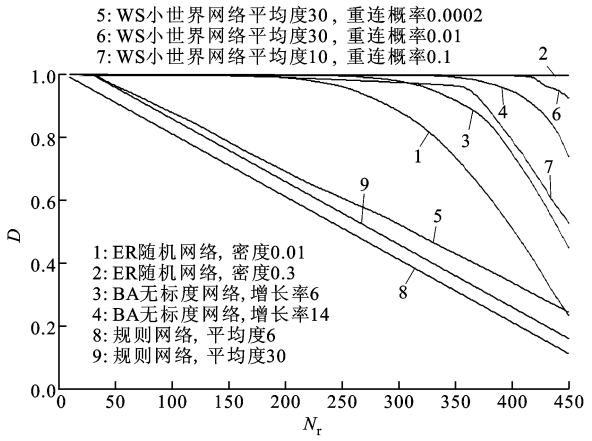


图 4 不同参数下 4 种典型网络的节点恢复鲁棒性

由图 4 可以发现，对于 ER 随机网络，当密度较小时，随着从网络中去除节点数的增多，越来越多的丢失节点得不到恢复. 当网络密度增大至 0.3 时，ER 随机网络中遭到破坏的节点可以完全恢复，本文称这个密度为节点恢复鲁棒性的临界密度. 与连接鲁棒性临界密度类似，ER 随机网络节点恢复鲁棒性临界密度也随着网络规模的增大而呈下降趋势.

对于 BA 无标度网络，当去除节点较少时，网络可以完全恢复，随着网络中去除节点数的增加，当到达某一临界值时，不能得到恢复的 丢失节点快速增加；随着网络密度的增大，节点的恢复鲁棒性得到增强.

对于 WS 小世界网络，如果固定重连概率 p，则随着去除节点的增多，恢复能力的下降具有“涌现”现象. 节点度数 k 的增大，可以使节点恢复鲁棒性得到提升. 若固定节点度数 k，随着重连概率 p 的增大，节点恢复鲁棒性得到提升.

规则网络的节点恢复鲁棒性可近似于重连概率极小时的小世界网络，随着去除节点个数的增加鲁棒性的下降呈“涌现”现象，可以发现增加网络的平均度 k 可以提高规则网络的节点恢复鲁棒性.

对于固定规模的 4 种典型网络，其节点恢复鲁棒能力的改变不仅随着去除节点个数的变化而呈现出“涌现”现象，而且随着其参数（主要是密度）的改变也呈现出“涌现”现象.

3.3 边恢复鲁棒性实验分析

采用与 3.2 节同样的实验策略，图 5 给出了网络规模为 500 时，几种具有代表性网络参数的边恢复鲁棒性指标随网络节点破坏数增加而变化的情况.

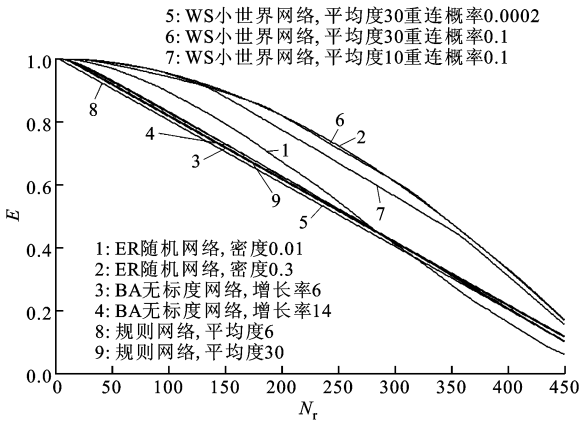


图 5　4 种典型网络的边恢复鲁棒性

对于 ER 随机网络，随着网络密度的提高，边恢复鲁棒性得到增强. 当网络密度达到一定临界值时，边恢复鲁棒性几乎与密度无关，原因是不能恢复的边为丢失节点间的相互联系，边恢复鲁棒性定义为

$$E = 1 - \left(\frac{N_r}{N}\right)^2 \tag{5}$$

对于 BA 无标度网络，具有不同增长率的线几乎完全重叠. 边恢复鲁棒性指标和去除节点数 N_r 呈线性负相关，且与密度的变化关系不大.

对于 WS 小世界网络，若固定重连概率 p，随着去除节点的增多，边的恢复能力下降同样具有“涌现”现象. 节点度数 k 的增大，可以使边恢复鲁棒性得到提升. 若固定节点度数 k，随着重连概率 p 的增大，边恢复鲁棒性得到提升.

与节点恢复鲁棒性一样，增加网络的平均度 k 可提高规则网络的边恢复鲁棒性，但并不十分显著.

总的来说，ER 随机网络对于恶意攻击的节点恢复鲁棒性和边恢复鲁棒性都最好，规则网络则最差. WS 小世界网络受其参数影响，其鲁棒性介于上述二者之间. BA 无标度网络的边恢复鲁棒性和规则网络一样差，但节点恢复鲁棒性较好.

4　结　论

本文定义了连接鲁棒性和恢复鲁棒性两类指标，分别反映了网络抵御破坏的能力和受到破坏后网络的重构能力. 仿真实验表明：ER 随机网络对于恶意攻击的鲁棒性要优于其他 3 种网络；BA 无标度网络仅节点恢复鲁棒性较好，边恢复鲁棒性和连接鲁棒性最差；规则网络拥有很好的连接鲁棒性但恢复鲁棒性最差；WS 小世界网络受其参数影响，鲁棒性介于 ER 随机网络和规则网络之间. 同时还发现，网络结构鲁棒性的下降不仅随着去除节点个数的增加而呈现出“涌现”现象，而且随着网络结构参数的改变也表现出一定的“涌现”现象. 对于不同的网络规模，出现“涌现”现象的临界网络参数也不同. 本文定义的指标可以刻画不同网络结构的鲁棒性，丰富了网络结构指标体系，有利于全面揭示互联网络和人际关系网络等现实网络的结构稳定性. 对于不同参数、不同网络的结构鲁棒性的数学解析表达和定量描述，是后续进一步研究的内容.

参考文献：

[1] NEWMAN M E J, BARABASI A L, Watts D J. The structure and dynamic of networks [M]. Princeton, NJ, USA: Princeton University Press, 2006.

[2] ALBERT R, JEONG H, BARABASI A L. Attack and error tolerance in complex networks [J]. Nature, 2000, 406(6794): 387-482.

[3] KWON Y K, CHO K H. Analysis of feedback loops and robustness in network evolution based on Boolean models [J]. BMC Bioinformatics, 2007, 8(9): 430-438.

[4] ASH J, NEWTH D. Optimizing complex networks for resilience against cascading failure[J]. Physica A: Statistical Mechanics and its Applications, 2007, 380(7): 673-683.

[5] GAO Liang, LI Menhui, WU Jinshan, et al. Betweenness-based attacks on nodes and edges of food weds. dynamics of continuous [J]. Discrete and Impulsive Systems: Series B, 2006, 13(3): 421-428.

[6] WANG Bing, TANG Huanwen, GUO Chonghui, et al. Optimization of network structure to random failures [J]. Physica A: Statistical Mechanics and its Applications, 2006, 368(2): 607-614.

[7] DODDS S P, WATTS D J, SABEL F C. Information exchange and robustness of organizational networks [J]. Proceedings of the National Academy of Sciences, 2003, 100(21): 12516-12521.

[8] BOHANNON J. Counterterrorism's new tool: 'meta-network' analysis [J]. Science, 2009, 325(5939): 409-411.

[9] 汪小帆，李翔，陈关荣. 复杂网络理论及其应用[M]. 北京：清华大学出版社，2006.

[10] BARABASI A L, ALBERT R. Emergence of scaling in random networks[J]. Science, 1999, 286(5439): 509-512.

[11] WATTS D J, STROGATZ S H. Collective dynamics of 'small-world' networks [J]. Nature, 1998, 393(6684): 440-442.

（编辑　刘杨）